Физика Волновых Процессов
Задача 5.2(а)

Валиахметов Булат, гр. 303

Постановка задачи

Оценить шаг дискретизации h и время T регистрации сигнала для вычисления его спектра $S_h(n)$ при помощи дискретного преобразования Фурье. Определить размерность массивов N, то есть число точек отсчета на периоде T придискретизации сигнала. Оценить частоту Найквиста ν_N. Определить шаг дискретизации h (в единицах измерения времени) и ширину спектра $\Delta\nu$ (в герцах). Изобразить графически сигналы $y(t)$ в зависимости от τ и их спектры $S(\nu)$ в зависимости от частоты ν, той в единицах, пропорциональных τ^{-1}, для следующего варианта:

(a) $y(t) = a \exp\left(-\dfrac{t^2}{\tau_0^2}\right) \sin(\Omega t)$, $\Omega/2\pi = 10^5$Гц, $\tau_0 = 10^{-3}$с.

Спектр сигнала

Сначала найдём спектр данного сигнала. Сигнал непериодичен => спектр непрерывен.

$$S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-i\omega t}dt = a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{\tau_0^2} - i\omega t)\sin(\Omega t)dt =$$

$$= a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{\tau_0^2} - i\omega t)(\exp(i\Omega t) - \exp(-i\Omega t))/(2i)dt =$$

$$= \frac{a}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{\tau_0^2} - i(\omega - \Omega)t)dt - \frac{a}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{\tau_0^2} - i(\omega + \Omega)t)dt =$$

$$= \frac{a\tau_0}{2i}\exp(-\frac{(\omega - \Omega)^2\tau_0^2}{4})\sqrt{\pi} - \frac{a\tau_0}{2i}\exp(-\frac{(\omega + \Omega)^2\tau_0^2}{4})\sqrt{\pi} =$$

$$= i\cdot\frac{a\tau_0\sqrt{\pi}}{2}\exp(-\frac{(\omega + \Omega)^2\tau_0^2}{4}) - i\cdot\frac{a\tau_0\sqrt{\pi}}{2}\exp(-\frac{(\omega - \Omega)^2\tau_0^2}{4}) = S(\omega)$$

Оценка ширины спектра

$$S(\nu) = i \cdot \frac{a\tau_0\sqrt{\pi}}{2}\exp(-(\nu+F)^2\pi^2\tau_0^2) - i \cdot \frac{a\tau_0\sqrt{\pi}}{2}\exp(-(\nu-F)^2\pi^2\tau_0^2)$$

$$\omega = 2\pi\nu, \Omega = 2\pi F$$

Положим S1(ν) = S(ν) / i. Видно, что S1(ν) имеет асимптотику $\underline{O}(\exp(-\pi^2\tau_0^2\nu^2))$

Выберем такую частоту ν_max, что S1(ν_max) будет на 6 порядков меньше, чем максимальное значение S1 = S1(ν=-F). Тогда приближенной оценкой границы спектра можно считать $\Delta\nu$ = $F + \nu$_max.

$$\exp(-\pi^2\nu_{\max}^2\tau_0^2) \approx 10^{-10} \quad \Rightarrow \quad \pi^2\nu_{\max}^2\tau_0^2 \approx 23 \text{ и } \nu_{\max} \approx 1.5/\tau_0 = 1.5 \text{ кГц}$$

$$F = 10^5 \text{ Гц}, \boxed{\Delta\nu = F + \nu_{max} = 101.5 \text{ кГц}}$$

Частота Найквиста, шаг дискретизации

Выберем частоту Найквиста несколько больше ширины спектра, чтобы обеспечить хорошую дискретизацию сигнала. Положим:

$$\boxed{\nu_N = 2/\tau_0 = 110\text{кГц}}$$

Из формулы частоты Найквиста найдём шаг дискретизации *h*:

$$\nu_N = 1/2h \Rightarrow \boxed{h = 1/2\nu_N = 4.5 \cdot 10^{-6}\ \text{с}}$$

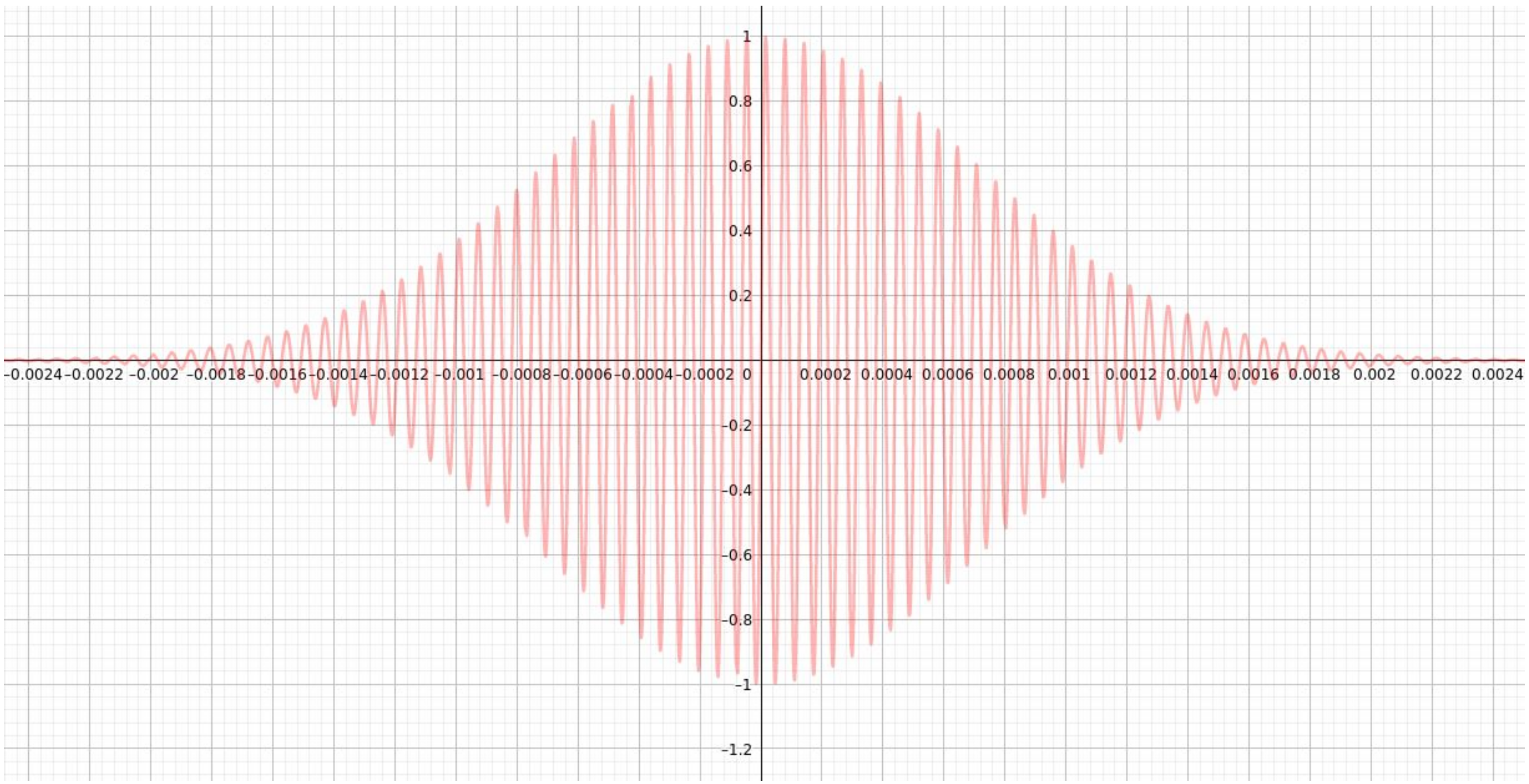
Время регистрации сигнала, количество измерений

Сигнал, вообще говоря, бесконечен. Оценим его длительность *t_max* как время, за которое его амплитуда убывает на 6 порядков. Абсолютно аналогично процессу вычислению спектра получаем

$$t_{max} \approx \sqrt{6\ln 10}\tau_0 \approx 3.7\tau_0 \Rightarrow \boxed{T = 2 \cdot t_{max} = 7.4\tau_0 = 7.4 \cdot 10^{-3}\text{c}}$$

Число точек дискретизации равно $\boxed{N = T/h = 7.4 \cdot 10^{-3}/4.5 \cdot 10^{-6} \approx 1650}$

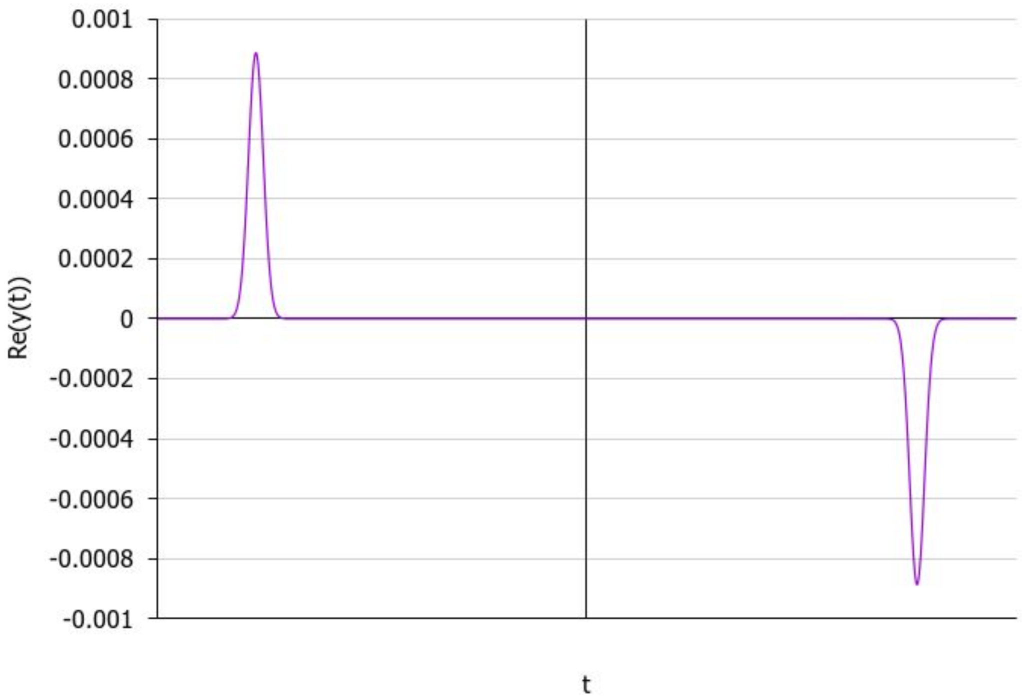
График сигнала



$$y(t) = a \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right) \sin(\Omega t),\ \Omega/2\pi = 10^5 \text{Гц},\ \tau_0 = 10^{-3} \text{с}.$$

График спектра

$$S(\nu) = i \cdot \frac{a\tau_0\sqrt{\pi}}{2}\exp(-(\nu+F)^2\pi^2\tau_0^2) - i \cdot \frac{a\tau_0\sqrt{\pi}}{2}\exp(-(\nu-F)^2\pi^2\tau_0^2)$$



Ввиду большой частоты Ω=100кГц график спектра в реальном масштабе тяжело проиллюстрировать. Он представляет собой разность двух гауссиан с центрами в точках -Ω и +Ω.